

Estimation Statistique de fonctions d'appartenance d'ensembles flous : le cas des fonctions trapézoïdales croissantes

Florence Dupuis^{1,2} and Alain Hillion¹

¹ GET - ENST Bretagne
Département Image et Traitement de l'Information
CNRS UMR TAMCIC
Technopôle de Brest Iroise, CS 83818,
29238 BREST Cedex, France
(e-mail: florence.dupuis@enst-bretagne.fr,
alain.hillion@enst-bretagne.fr)

² ENIB
Technopôle de Brest Iroise, CS 73862,
29238 BREST Cedex 3, France
(e-mail: florence.dupuis@enib.fr)

Abstract. Nous présentons ici une méthode nouvelle de détermination des fonctions d'appartenance floue appliquée au cas des fonctions trapézoïdales croissantes. Pour l'estimation, nous considérons un modèle statistique reposant essentiellement sur la notion de processus cohérent. Nous donnons par cette méthode des estimateurs, ponctuels et par région de confiance, des paramètres d'une fonction d'appartenance trapézoïdale croissante. Les résultats obtenus sont illustrés par des simulations.

Keywords: Fonction d'appartenance floue, Processus "expert" cohérent, Estimation ponctuelle, Estimation par région de confiance.

1 Introduction

En logique floue, la description d'un ensemble flou réel A passe par la connaissance de sa fonction $A(x)$. Notre but est d'estimer des fonctions d'appartenance de type trapézoïdal croissant à partir d'informations concernant des points de l'ensemble \mathbb{R} , appelés points de contrôle. Dans le domaine de la reconstruction de fonction d'appartenance flou à partir d'observations, les méthodes principalement utilisées relèvent de l'analyse numérique ou de méthodes probabilistes [Shen *et al.*, 2000]; [Tamaki *et al.*, 1998]; [Cheng and Chen, 1997]; [Civanlar and Trussell, 1986]; [Devi and Sarma, 1985]. Nous utilisons ici une méthode statistique nouvelle présentée dans [Dupuis and Hillion, 2004].

2 Processus cohérent

On considère A un sous ensemble flou de \mathbb{R} . Pour l'étude nous interrogeons des experts sur un ensemble fini ordonné de points $\mathfrak{X} = \{x_1, \dots, x_n / \forall i, 1 \leq i \leq n, x_i \in \mathbb{R}, x_1 < x_2 < \dots < x_n\}$. Les x_i représentent les points de contrôle dont l'expert pense qu'ils appartiennent totalement ou pas du tout à A .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $X(x)$ la réponse binaire à cette question.

Définition 1 On définit le processus cohérent $\{X(x)\}$ associé à l'ensemble flou A par (cf [Dupuis and Hillion, 2004]) un processus "expert" $\{X(x)\}_{x \in \mathfrak{X}}$ discret à valeurs dans $\{0, 1\}$, auquel on impose pour tout x ,

- $E[X(x)] = A(x)$.
- Si $X(x) = 1$, alors pour tout y tel que $A(y) \geq A(x)$, $X(y) = 1$.
- Si $X(x) = 0$, alors pour tout y tel que $A(y) \leq A(x)$, $X(y) = 0$.

Dans le cas où la fonction d'appartenance est croissante, le processus cohérent associé sera nécessairement croissant. On peut alors calculer la loi de la variable aléatoire $X(x_{(n)}) = (X(x_1), X(x_2), \dots, X(x_n))$ à valeurs dans $\Omega = \cup_{0 \leq k \leq n} (\{0\}^k \times \{1\}^{n-k})$. On définit les éléments de Ω par une suite $\alpha_{(n)} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ où pour tout $i, 1 \leq i \leq n$, $\alpha_i = 0$ ou 1 , est la valeur réponse à la question: " x_i appartient-il à l'ensemble flou A ?" (par convention on pose $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = 1$ avec $x_0 = -\infty$ et $x_{n+1} = +\infty$, la fonction $A(x)$ n'étant pas constante). On constate que seul l'instant de saut (Fig.1) du processus "expert" intervient dans l'expression de la probabilité.

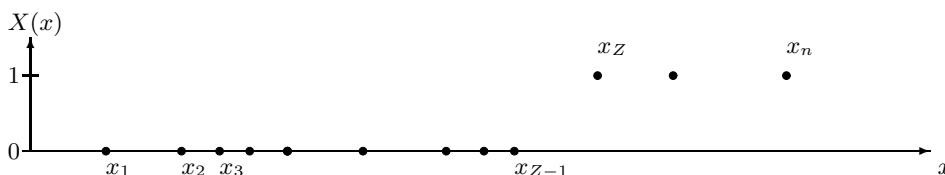


Fig. 1. Exemple de trajectoire "expert". On visualise l'instant de saut "Z".

Théorème 1 Soit $Z = \inf_{1 \leq i \leq n+1} \{i / X(x_i) = 1\}$, $\forall \alpha_{(n)} \in \Omega$, si $r(\alpha) = \inf_{1 \leq i \leq n+1} \{i / \alpha_i = 1\}$,

$$P[X(x_{(n)}) = \alpha_{(n)}] = (A(x_{r(\alpha)}) - A(x_{r(\alpha)-1})) = P[Z = r(\alpha)]. \tag{1}$$

Démonstration. La suite $\{A(x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ est croissante et par définition du processus cohérent la suite $\{X(x_i)\}_{1 \leq i \leq n}$ est également croissante. Soit $Z = \inf_{1 \leq i \leq n+1} \{i / X(x_i) = 1\}$. Par définition de l'inf, pour tout $\forall k, 1 \leq k \leq n+1$, $\{Z = k\} = \{0 = \dots = X(x_{k-1}), X(x_k) = \dots = 1\}$. Donc, $\forall \alpha_{(n)} \in \{0, 1\}^n$, si $r(\alpha) = \inf_{1 \leq i \leq n+1} \{i / \alpha_i = 1\}$, $P[X(x_{(n)}) = \alpha_{(n)}] = P[Z = r(\alpha)] \mathbb{1}_{\alpha_{(n)} \in \Omega}$.

Puis d'après la définition du processus cohérent, et étant donné que $X(x_{(n)})$ est une suite croissante, on a la relation suivante pour tout $k, 1 \leq k \leq n + 1$,

$$\begin{aligned} & P[X(x_0) = 0, \dots, X(x_{k-1}) = 0, X(x_k) = 1, \dots, X(x_{n+1}) = 1] \\ &= P[X(x_{k-1}) = 0, X(x_k) = 1] \\ &= A(x_k) - A(x_{k-1}). \end{aligned}$$

■

3 Estimation des paramètres

Une fonction de type trapézoïdale croissante (Fig.2) est entièrement définie par la donnée du paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $\theta_1 < \theta_2$, tel que

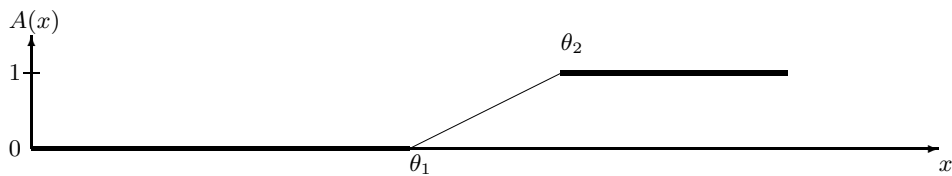


Fig. 2. Graphe d'une fonction trapézoïdale croissante.

$$\begin{aligned} \text{Si } x \leq \theta_1 \quad & A_\theta(x) = 0, \\ \text{Si } \theta_1 < x \leq \theta_2 \quad & A_\theta(x) = \frac{x - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \\ \text{Si } \theta_2 < x \quad & A_\theta(x) = 1. \end{aligned} \tag{2}$$

On se propose d'estimer θ_1 et θ_2 à partir d'un m^échantillon X_1, X_2, \dots, X_m du processus "expert", $m \geq 2$. Si pour tout $i, 1 \leq i \leq m$, Z_i est le saut associé au processus X_i , on note Z'_1, Z'_2, \dots, Z'_m ces instants de saut réordonnés, i.e tels que $\min_{1 \leq j \leq m}(Z_j) = Z'_1 \leq Z'_2 \leq \dots \leq Z'_m = \sup_{1 \leq j \leq m}(Z_j)$, $\forall (\alpha_{j(n)})_{1 \leq j \leq m} \in \Omega^m$, on déduit du théorème 1 l'expression de la vraisemblance $L_\theta(\alpha_{1(n)}, \alpha_{2(n)}, \dots, \alpha_{m(n)})$

$$\frac{P_\theta[Z'_1 = r(\alpha'_1)]P_\theta[Z'_m = r(\alpha'_m)]}{(\theta_2 - \theta_1)^{m-2}} \prod_{j=2}^{m-1} (x_{r(\alpha'_j)} - x_{r(\alpha'_{j-1})}) \tag{3}$$

pour $\theta_1 < x_{r(\alpha'_2)} \leq x_{r(\alpha'_{m-1})-1} < \theta_2$, où les $\alpha'_{1(n)}, \alpha'_{2(n)}, \dots, \alpha'_{m(n)}$ sont les $\alpha_{1(n)}, \alpha_{2(n)}, \dots, \alpha_{m(n)}$ réordonnés tels que $r(\alpha'_1) \leq r(\alpha'_2) \leq \dots \leq r(\alpha'_m)$.

Proposition 1 *Le paramètre $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ est identifiable si et seulement s'il y a plus de deux points de contrôle compris entre θ_1 et θ_2 .*

En effet, si on note F_{A_θ} la loi du n-uple $X(x_{(n)})$ où X est un processus cohérent de A paramétrée par θ . Soient $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ et $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathbb{R}^2$, $F_{A_\theta} = F_{A_\varphi} \iff \forall k, 1 \leq k \leq n, A_\theta(x_k) = A_\varphi(x_k)$.

i) Si il y a moins d'un point de contrôle entre θ_1 et θ_2 alors on peut trouver plusieurs fonctions trapézoïdales croissantes ayant les mêmes valeurs aux points de contrôle.

ii) Si il y a plus de deux points de contrôle compris entre θ_1 et θ_2 : $\exists J$ tels que $x_{J-1} \leq \theta_1 < x_J < x_{J+1} < \theta_2$.

De plus, $\begin{cases} A_\theta(x_J) = A_\varphi(x_J) \\ A_\theta(x_{J+1}) = A_\varphi(x_{J+1}) \end{cases}$ est un système de Cramer ($\theta_2 \neq \theta_1, x_{J+1} \neq x_J$) de solution unique $\varphi_1 = \theta_1, \varphi_2 = \theta_2$. ■

Proposition 2 *La statistique $(\min_{1 \leq j \leq m}(Z_j), \sup_{1 \leq j \leq m}(Z_j))$ est exhaustive minimale complète.*

D'après (3) et le théorème de factorisation, (Z'_1, Z'_m) est exhaustive. Soit h une fonction définie sur $H = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2, x < y\}$ telle que, pour tout $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \theta_1 < \theta_2, E_\theta[h(Z'_1, Z'_m)] = 0$. On montre par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}, h(k, k+n) = 0$. On en déduit que (Z'_1, Z'_m) est exhaustive, complète donc minimale. ■

On définit les indices J et M des points de contrôle encadrant les paramètres, par $x_{J-1} \leq \theta_1 < x_J$ et $x_{M-1} < \theta_2 \leq x_M$.

Proposition 3 *L'estimateur du maximum de vraisemblance*

$$\left(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)}\right) = \left(\min_{1 \leq j \leq m} (x_{Z_j-1}), \max_{1 \leq i \leq m} (x_{Z_i})\right) \text{ converge p.s vers } (x_{J-1}, x_M).$$

Pour maximiser la vraisemblance (3), on étudie la quantité

$$\frac{P_\theta[Z'_1=r(\alpha'_1)]P_\theta[Z'_m=r(\alpha'_m)]}{(\theta_2-\theta_1)^{m-2}} = \frac{\varphi(\theta_1, \theta_2, x_{r(\alpha'_1)-1}, x_{r(\alpha'_m)})}{(\theta_2-\theta_1)^m} \text{ où } \varphi(\theta_1, \theta_2, x_{r(\alpha'_1)-1}, x_{r(\alpha'_m)})$$

vaut

$$\left\{ \begin{array}{ll} (x_{r(\alpha'_1)} - x_{r(\alpha'_1)-1}) (x_{r(\alpha'_m)} - x_{r(\alpha'_m)-1}) & \text{si } \begin{cases} \theta_1 < x_{r(\alpha'_1)-1} < x_{r(\alpha'_1)} \\ x_{r(\alpha'_m)-1} < x_{r(\alpha'_m)} < \theta_2 \end{cases} \\ (x_{r(\alpha'_1)} - \theta_1) (x_{r(\alpha'_m)} - x_{r(\alpha'_m)-1}) & \text{si } \begin{cases} x_{r(\alpha'_1)-1} \leq \theta_1 < x_{r(\alpha'_1)} \\ x_{r(\alpha'_m)-1} < x_{r(\alpha'_m)} < \theta_2 \end{cases} \\ (x_{r(\alpha'_1)} - x_{r(\alpha'_1)-1}) (\theta_2 - x_{r(\alpha'_m)-1}) & \text{si } \begin{cases} \theta_1 < x_{r(\alpha'_1)-1} < x_{r(\alpha'_1)} \\ x_{r(\alpha'_m)-1} < \theta_2 \leq x_{r(\alpha'_m)} \end{cases} \\ (x_{r(\alpha'_1)} - \theta_1) (\theta_2 - x_{r(\alpha'_m)-1}) & \text{si } \begin{cases} x_{r(\alpha'_1)-1} \leq \theta_1 < x_{r(\alpha'_1)} \\ x_{r(\alpha'_m)-1} < \theta_2 \leq x_{r(\alpha'_m)} \end{cases} \end{array} \right.$$

Cette quantité est maximum sur le bord de l'ensemble de définition, i.e si et seulement si $\theta_1 = x_{r(\alpha'_1)-1}$ et $\theta_2 = x_{r(\alpha'_m)}$.

La convergence presque sûre de $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)})$ vers les extrémités du support de la fonction de répartition de Z est assurée par les théorèmes de convergence des valeurs extrêmes [Embrechts *et al.*, 1997]. ■

Dans le cas où le pas varie avec la taille de l'échantillon, on peut obtenir un résultat plus précis :

Théorème 1 *Sous l'hypothèse $p_m = o(\frac{1}{m})$, où p_m est le pas entre deux points de contrôle,*

$$m \left(\frac{\hat{\theta}_1^{(m)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \frac{\theta_2 - \hat{\theta}_2^{(m)}}{\theta_2 - \theta_1} \right) \text{ converge en loi vers } (T_1, T_2), \tag{4}$$

où T_1 et T_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.

Démonstration. Comme dans la théorie asymptotique des variables extrêmes connue dans [Galambos, 1978], les estimateurs $\hat{\theta}_1^{(m)}$ et $\hat{\theta}_2^{(m)}$ sont asymptotiquement indépendants. D'autre part, si on note $\mathcal{E}nt$ la partie entière, pour tout $t, y \in \mathbb{R}$, $F_Z(t + \frac{y}{m}) = P_\theta \left[Z \leq p_m \mathcal{E}nt \left[\frac{t}{p_m} + \frac{y}{mp_m} \right] \right]$. En conséquence, avec l'hypothèse $p_m = o(\frac{1}{m})$, pour tout $y_1 \in \mathbb{R}$, $(1 - F_Z(\theta_1 + \frac{y_1}{m}))^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - e^{-\frac{y_1}{\theta_2 - \theta_1}} \right)$, d'où le résultat de convergence. ■

Corollaire 1 *On note, $\forall \alpha \in [0, 1]$, $k_\alpha = -\ln(1 - \sqrt{1 - \alpha})$. Sous l'hypothèse du théoème 1, on en déduit l'intervalle de confiance asymptotiquement minimum en volume, de seuil de confiance $1 - \alpha$, pour (θ_1, θ_2) :*

$$\left[\hat{\theta}_1^{(m)} - \frac{1}{m}(\hat{\theta}_2^{(m)} - \hat{\theta}_1^{(m)})k_\alpha, \hat{\theta}_1^{(m)} \right] \times \left[\hat{\theta}_2^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)} + \frac{1}{m}(\hat{\theta}_2^{(m)} - \hat{\theta}_1^{(m)})k_\alpha \right] \tag{5}$$

Démonstration. Soit $\hat{C}_m = \left[\hat{\theta}_1^{(m)} - \frac{1}{m}(\hat{\theta}_2^{(m)} - \hat{\theta}_1^{(m)})k, \hat{\theta}_1^{(m)} \right] \times \left[\hat{\theta}_2^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)} + \frac{1}{m}(\hat{\theta}_2^{(m)} - \hat{\theta}_1^{(m)})k' \right]$ tel que $P_\theta \left[(\theta_1, \theta_2) \in \hat{C}_m \right] \geq 1 - \alpha$. On définit C par $P_\theta[(\theta_1, \theta_2) \in \hat{C}_m] = P_\theta \left[m \left(\frac{\hat{\theta}_1^{(m)} - \theta_1}{\theta_2 - \theta_1}, \frac{\theta_2 - \hat{\theta}_2^{(m)}}{\theta_2 - \theta_1} \right) \in C \right]$. D'après le théorème 1, on obtient la convergence $P_\theta[(\theta_1, \theta_2) \in \hat{C}_m] \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} P[(T_1, T_2) \in C]$. Le minimum du volume de \hat{C}_m , i.e kk' n'est pas atteint dans le domaine $(1 - e^{-k})(1 - e^{-k'}) > 1 - \alpha$. Sur le bord du domaine, la méthode des multiplicateurs de Lagrange donne comme condition $k = k'$ avec k tel que $P_\theta[(\theta_1, \theta_2) \in \hat{C}_m] = 1 - \alpha$, d'où le résultat. ■

Remarque 1 *Si le contrôle était continu, on aurait $T = \inf\{x \in \mathbb{R}/X(x) \neq X(0)\}$ le saut "continu". Les variables Z et T sont liées par les relations suivantes : $x_{Z-1} < T \leq x_Z$ et $\forall i, 1 \leq i \leq n+1, P_\theta[Z = i] = P_\theta[x_{i-1} < T \leq x_i]$.*

De plus, pour $x > 0$, $P_\theta [T > x] = P_\theta [X(x) = 0] = 1 - A(x)$ et $P_\theta [T \leq x] = P_\theta [X(x) = 1] = A(x)$.

Dans le cas particulier où A est trapézoïdale croissante, T est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\theta_1, \theta_2]$, $T \sim \mathcal{U}([\theta_1, \theta_2])$. Dans le cadre statistique d'un m -échantillon, l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)}) = (\inf_{1 \leq j \leq m} (T_j), \sup_{1 \leq i \leq m} (T_i))$ (cf. [Johnson and Kotz, 1970]) correspond à la version asymptotique (quand le pas tend vers 0) du cas discret. De plus, d'après la théorie des variables extrêmes, on retrouve la convergence presque sûre de $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)})$ vers (θ_1, θ_2) et on a la convergence (4) du théorème 1 (cf. [Galambos, 1978]).

4 Simulations

Pour simuler le processus, il est nécessaire d'en connaître certaines propriétés:

Proposition 4 *Le processus cohérent associé à une fonction d'appartenance croissante, est un processus de markov (en général non homogène).*

En effet, d'après la définition 1 du processus cohérent, $\forall i, 1 \leq i \leq n + 1$, $P[X(x_{i+1}) = \alpha_{i+1} / X(x_i) = \alpha_i, \dots, X(x_0) = \alpha_0] = P[X(x_{i+1}) = \alpha_{i+1} / X(x_i) = \alpha_i]$. D'autre part, $P[X(x_1) = \alpha_1] = A(x_1) \mathbb{1}_{\alpha_1=1} + (1 - A(x_1)) \mathbb{1}_{\alpha_1=0}$ et pour tout i , si $P[X(x_i) = \alpha_i] \neq 0$, on a

$$P[X(x_{i+1}) = \alpha_{i+1} / X(x_i) = \alpha_i] = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_i = \alpha_{i+1} = 1 \\ \frac{1 - A(x_{i+1})}{1 - A(x_i)} & \text{si } \alpha_i = \alpha_{i+1} = 0 \\ \frac{A(x_{i+1}) - A(x_i)}{1 - A(x_i)} & \text{si } \alpha_i < \alpha_{i+1} \end{cases}$$

■

Toutes les simulations suivantes seront effectuées avec comme paramètre $\theta = (4, 6)$. Les graphiques présentent pour chaque simulation l'histogramme des sauts puis la fonction d'appartenance réelle, la fonction d'appartenance estimée et sous l'hypothèse du pas petit (cf théorème 1), une région de confiance à 95%, pour l'estimation de la fonction d'appartenance.

Dans le cas où le pas n'est pas négligeable devant l'inverse du nombre d'observations, par exemple pour $m=50$ et $n=10$ (fig. 3), on obtient $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)}) = (3.6, 6.2)$.

Sous l'hypothèse du pas petit et pour un intervalle de points de contrôle fixé, si m est le nombre d'"experts" interrogés, on suppose pour les simulations suivantes que $p_m = \frac{1}{m^2}$. On présente les simulations pour un nombre d'observations petit $m = 5$ (fig. 4, $p_m \simeq 0.04$ et le nombre de points de contrôle $n \simeq 180$), on a $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)}) = (4.3, 5.6)$. Pour un nombre d'observations plus élevé $m = 20$, ($p_m \simeq 0.0025$ et $n \simeq 2800$), on obtient $(\hat{\theta}_1^{(m)}, \hat{\theta}_2^{(m)}) = (4, 5.9)$.

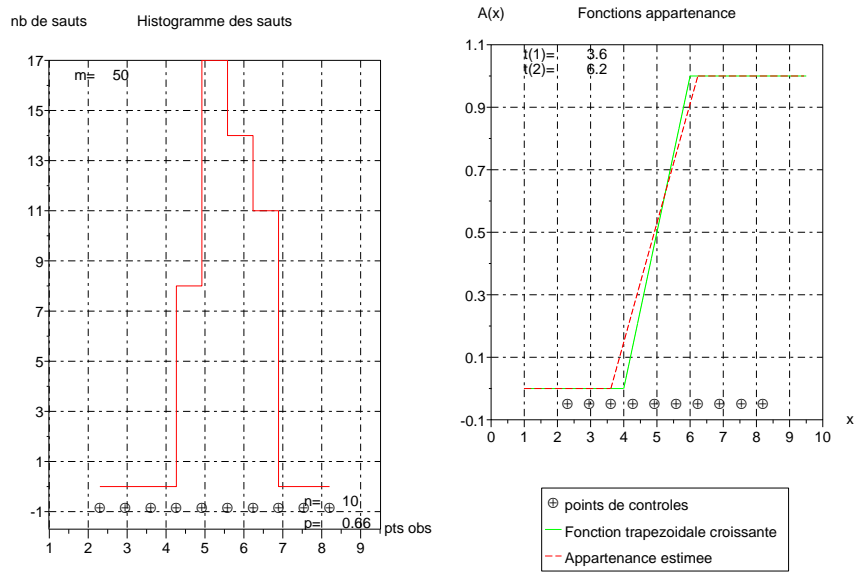


Fig. 3. Exemples de simulation pour $n=10$, $m=50$.

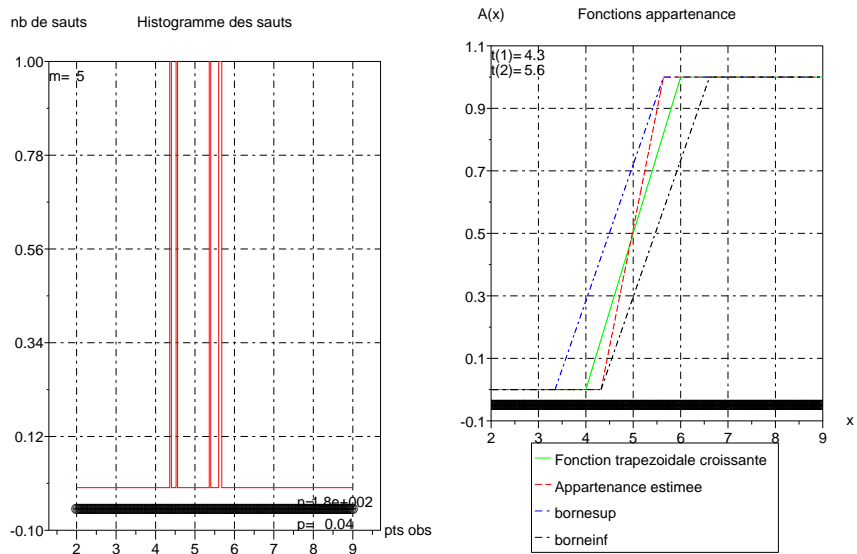


Fig. 4. Simulation sous l'hypothèse du théorème 1, cas $m=5$.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une estimation des paramètres d'une fonction d'appartenance trapézoïdale croissante. Cette estimation repose sur la méthode du maximum de vraisemblance; la convergence des estimateurs et la loi limite permettent de définir un intervalle de confiance. Des généralisations sont en cours dans plusieurs directions : d'une part nous étendons cette méthode aux fonctions d'appartenance trapézoïdales quelconques, d'autre part nous comparons les résultats d'estimation des paramètres à ceux obtenus par la méthode des moments, enfin nous procédons à l'estimation directe de la fonction d'appartenance par minimisation d'une fonction de coût fondée sur des distances entre ensembles flous.

References

- [Arslan and Kaya, 2001]A. Arslan and M. Kaya. Determination of fuzzy logic membership functions using genetic algorithms. *Fuzzy sets and systems*, **118**:297–306, 2001.
- [Bloch *et al.*, 1997]I. Bloch, L. Aurdal, D. Bijno, and J. Muller. Estimation of class membership functions for grey-level based image fusion. In *ICIP'97*, volume **III**, pages 268–271, Santa Barbara, CA, October 1997.
- [Bloch, 2003]I. Bloch. *Fusion d'informations en traitement du signal et des images*. Hermès science. Lavoisier, 2003.
- [Bouchon-Meunier and Marsala, 2003]B. Bouchon-Meunier and C. Marsala. *Logique floue, principes, aide à la décision*. Hermès science. Lavoisier, 2003.
- [Caillol *et al.*, 1993]H. Caillol, A. Hillion, and W. Pieczynski. Fuzzy random fields and unsupervised image segmentation. *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, **31**(4):801–810, 1993.
- [Cheng and Chen, 1997]H.D. Cheng and J.R. Chen. Automatically determine the membership function based on the maximum entropy principle. *Information Sciences*, **96**:163–182, 1997.
- [Civanlar and Trussell, 1986]M.R. Civanlar and H.J. Trussell. Constructing membership functions using statistical data. *Fuzzy sets and systems*, **18**:1–13, 1986.
- [D'Alché-Buc, 2003]F. D'Alché-Buc. Association des systèmes d'inférence floue avec les méthodes connexionnistes et évolutionnistes. In *Traitement de données complexes et commande en logique floue (dir. B. Bouchon-Meunier and C. Marsala)*, Hermès science, chapter 5, pages 199–225. Lavoisier, 2003.
- [Devi and Sarma, 1985]B. Bharathi Devi and V.V.S. Sarma. Estimation of fuzzy membership from histograms. *Information Sciences*, **35**:43–59, 1985.
- [Dupuis and Hillion, 2004]F. Dupuis and A Hillion. Estimation statistique des fonctions d'appartenance d'ensembles flous. Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, 2004.
- [Embrechts *et al.*, 1997]P. Embrechts, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modelling Extremal Events*. Springer, 1997.
- [Galambos, 1978]J. Galambos. *The asymptotic theory of extreme order statistics*. Wiley, 1978.

- [Hummel and Landy, 1988]R.A. Hummel and M.S. Landy. A statistical viewpoint on the theory of evidence. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, **10**(2):235–247, 1988.
- [Johnson and Kotz, 1970]N L. Johnson and S. Kotz. *Continuous univariate distributions - II*. Wiley, 1970.
- [Shen *et al.*, 2000]J. Shen, W. Shen, H.J. Sun, and J.Y. Yang. Fuzzy neural nets with non-symétric π membership functions and applications in signal processing and image analysis. *Signal processing*, **80**(6):965–983, 2000.
- [Tamaki *et al.*, 1998]F. Tamaki, A. Kanagawa, and H. Ohta. Identification of membership functions based on fuzzy observation data. *Fuzzy sets and systems*, **93**(2):311–318, 1998.